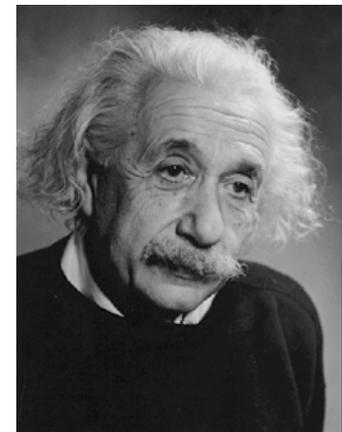


PARTE 1 - **Mecânica Clássica relativística**

1. As 3 leis de Newton e a relatividade de Newton.
2. O experimento de Michelson-Morley.
3. Os postulados da Teoria da Relatividade Especial.
4. As transformações de Lorentz: espaço e velocidade
 - 4.1. Dilatação do tempo;
 - 4.2. Conceito de simultaneidade;
 - 4.3. Contração do espaço.
5. Momentum relativístico.
6. Força em sistemas relativísticos.
7. Energia relativística.
8. Transformação de Lorentz de momentum-energia.
9. Efeito Doppler relativístico.



RELATIVIDADE ESPECIAL

Observa-se que as ondas eletromagnéticas (OE) se propagam no vácuo com a velocidade de $c \approx 3.00 \times 10^8 \text{ m/s}$, onde c é uma constante universal (não depende do comprimento de onda) - VELOCIDADE DA LUZ.

Vamos ver que a radiação eletromagnética é quantizada, por exemplo, quando analisarmos o efeito fotoelétrico. As OE's têm um comportamento de partícula - são **fótons**. A energia de um fóton individual é diretamente proporcional a frequência da onda, mas todos os fótons têm a mesma velocidade c quando se movem no vácuo, independentes de suas energias.

A velocidade v de qualquer objeto macroscópico de massa m encontrado na terra é $v \ll c$!!!!

*Definição clássica de **momentum**, $p = mv$
e da **energia cinética** $E_k = 1/2mv^2 = p^2/2m$
estabelecidas empiricamente como quantidades que são conservadas em qualquer colisão.

*Quando a partícula tem v comparável à $c \Rightarrow p$ e E_k não são mais quantidades que se conservam em colisões de partículas.

*Vamos precisar de uma descrição revisada para partículas com altas velocidades e energias cinéticas - teoria da relatividade especial.

FUNDAMENTOS DA RELATIVIDADE ESPECIAL: POSTULADOS

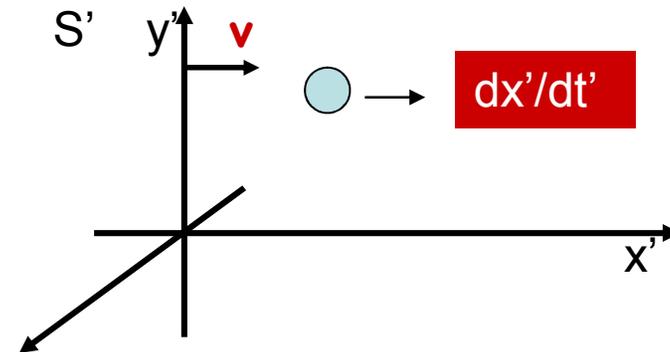
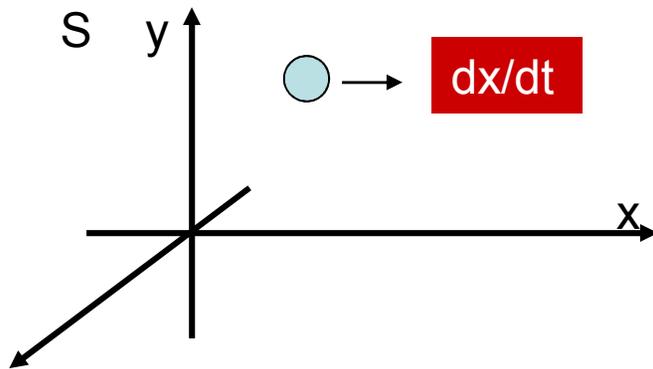
A teoria da relatividade especial foi formulada por **Einstein 1905** (mesmo ano de publicação de seus famosos *papers* sobre o movimento Browniano e o efeito fotoelétrico).

1. As leis da física são idênticas em qualquer sistema de referência inercial.

Este postulado é idêntico ao usado por Newton em sua formulação das leis da física clássica. A definição de um sistema inercial é um sistema de referência no qual a partícula não tem aceleração a menos que alguma força esteja atuando sobre a partícula.

2. A velocidade da radiação eletromagnética no vácuo é constante, independente de qualquer movimento da fonte

Este postulado pode parecer contra-intuitivo; ele é baseado em nossa experiência comum a baixas velocidades, $v \ll c$, na qual as velocidades se somam linearmente. Considere uma partícula que se move c / veloc. (dx/dt) na direção x num referencial que se move com uma velocidade v na direção x , as coordenadas são:



$$t' = t \quad x' = x - vt \quad y' = y \quad z' = z$$

Transformação de GALILEO (TG)

Por ex.: um vento frontal de velocidade v , decresce a velocidade de um avião com respeito a superfície da terra por uma quantidade v .

A **TG** funciona desde que as v 's dos objetos sejam pequenas comparadas com a velocidade da luz. Ela não funciona para grandes velocidades. Vamos ter que desenvolver uma intuição relativística física.

Como $dt = dt'$, a diferenciação da transformação da coordenada x , com respeito a t nos fornece a lei de adição da velocidade:

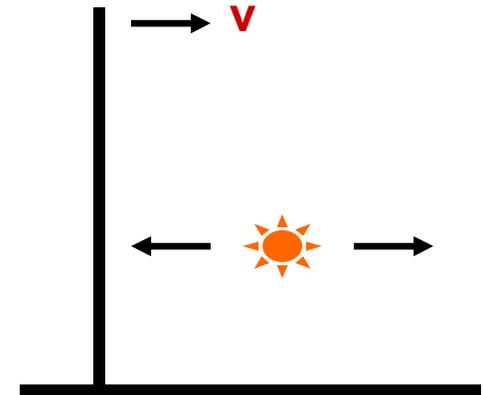
$$dx'/dt = dx/dt - v$$

Considere uma fonte de luz em repouso.

➡ A luz emitida por esta fonte se propaga com c .

Agora considere um referencial que se move com velocidade v na direção x .

➡ Neste referencial a fonte de luz tem uma velocidade v . A TG prevê que a velocidade da luz que se move no sentido dos x negativos, no referencial que se move seja de $v+c$.



Isso não é verdade:

a velocidade da luz no referencial que se move não se altera - ela é igual a c , mesmo que a velocidade do sistema de referencia seja muito grande!

O EXPERIMENTO DE MICHELSON-MORLEY

Como as ondas sonoras precisam de um meio para se propagar, era natural imaginar que as **OE** deveriam também precisar de um meio para a propagação.

O meio hipotético foi chamado de **éter**.

1881 **Albert Michelson** propôs um experimento em que era sensível a possível presença do éter

1887 Repetido por **Michelson & Edward Morley** com uma precisão muito maior

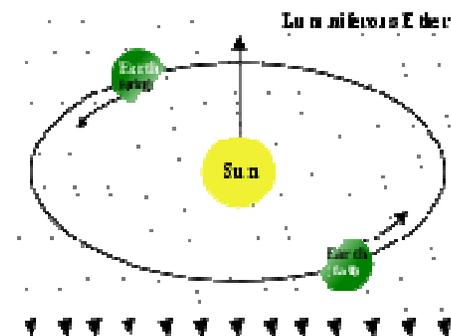
Se a propagação das ondas de luz dependesse do éter, então o movimento em relação ao éter teria necessariamente um efeito na velocidade da luz.

A procura pela existência do éter é equivalente a testar o segundo postulada da relatividade especial. O objetivo era ver se o movimento da terra em sua órbita afetava ou não a velocidade da luz.

A velocidade orbital da Terra (em torno do Sol) é de $3 \times 10^4 \text{ m/s}$:

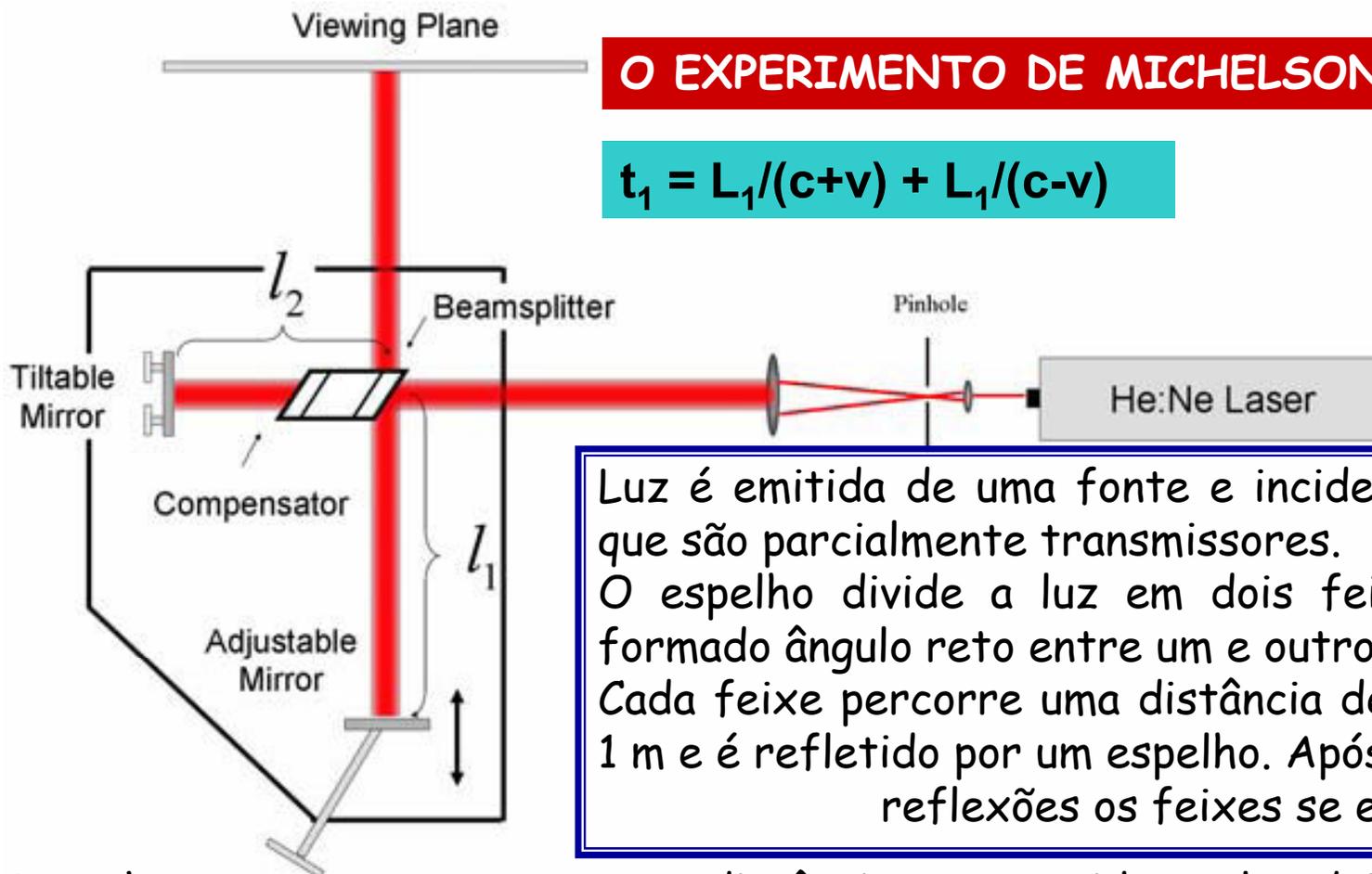
$$v/c = 3 \times 10^4 / 3 \times 10^8 = 10^{-4}.$$

Se a TG estivesse certa, então a velocidade da luz de uma fonte que fosse diretamente paralela ao movimento da terra, deveria ser **incrementada** de um dez milésimos, enquanto que a que tivesse um movimento antiparalelo deveria ser **reduzida** da mesma quantidade.



O EXPERIMENTO DE MICHELSON-MORLEY

$$t_1 = L_1/(c+v) + L_1/(c-v)$$



Luz é emitida de uma fonte e incide sobre espelhos que são parcialmente transmissores. O espelho divide a luz em dois feixes que viajam formado ângulo reto entre um e outro. Cada feixe percorre uma distância de mais ou menos 1 m e é refletido por um espelho. Após múltiplas reflexões os feixes se encontram.

Suponha por um momento que as distâncias percorridas pelos dois feixes sejam exatamente as mesmas. De acordo com a **TR**, os feixes chegam precisamente no mesmo tempo.

Se a **TG** fosse válida, a velocidade da luz não seria constante ao longo dos dois caminhos devido **ao movimento da Terra**, e os dois feixes não chegariam no mesmo instante. Na prática os 2 caminhos percorridos não podem ser idênticos o que significa que deveria haver um **padrão de interferência** devido a esta diferença de caminho óptico.

A luz dos dois caminhos chega fora de fase ➔ O experimento procura por uma mudança deste **padrão de interferência** quando se aplica uma rotação (a rotação provoca uma mudança na direção do caminho dos feixes de luz, com respeito à direção de movimento da Terra).

De acordo com a TER a velocidade dos feixes de luz permanece constante e o padrão de interferência não se altera com a rotação de 90 graus do aparato.

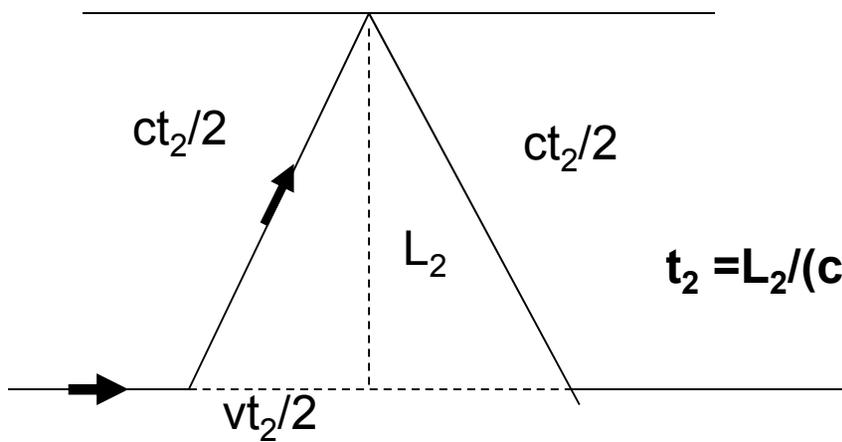
➔ vamos então analisar o experimento usando a soma de velocidades prevista pela TG: considere o caso no qual o feixe se move paralelo e antiparalelo ao movimento da Terra.

O tempo t_1 para se alcançar o interferômetro é:

$$t_1 = L_1/(c+v) + L_1/(c-v) = 2L_1/c(1-v^2/c^2)$$

No caso em que o feixe se move **perpendicular** ao movimento da Terra, o tempo t_2 para se alcançar o interferômetro é:

$$(ct_2/2)^2 = L_2^2 + (vt_2/2)^2$$



$$t_2 = L_2/(c^2-v^2)^{1/2} + L_2/(c^2-v^2)^{1/2} = (2L_2/c) 1/(1-v^2/c^2)^{1/2}$$

Desta forma, a diferença de tempo de trânsito nos dois percursos é dada por:

$$\Delta t = (t_2 - t_1) = 2/c [L_2/(1 - v^2/c^2)^{1/2} - L_1/(1 - v^2/c^2)]$$

Supondo agora que todo o aparelho tenha sido rodado de 90°, vemos que o percurso L_2 troca de lugar com o percurso L_1 e portanto, a nova diferença de tempo será dada por:

$$\Delta t' = (t'_2 - t'_1) = 2/c [L_2/(1 - v^2/c^2) - L_1/(1 - v^2/c^2)^{1/2}]$$

Desta forma a rotação muda as diferenças entre os intervalos de tempo pela quantidade: $\Delta t' - \Delta t = 2/c [(L_1 + L_2) / (1 - v^2/c^2) - (L_1 + L_2)/(1 - v^2/c^2)^{1/2}]$

Podemos agora usar o desenvolvimento binomial $(1+x)^n \approx 1+nx$, para x pequeno o que nos dá:

$$1/(1 - v^2/c^2) \approx 1 + v^2/c^2 \quad e \quad 1/(1 - v^2/c^2)^{1/2} \approx 1 + v^2/2c^2$$



$$\Delta t' - \Delta t = v^2/c^2 [L_1 + L_2]/c$$

Previsão: deslocamento nas franjas de interferência sobre o anteparo: **claro/escuro**

Este deslocamento ΔN será dado pela razão entre as diferenças de tempo e o período das ondas (temos que lembrar que como os feixes partem da mesma fonte, o período e a frequência são iguais para ambos os feixes).

Logo, o deslocamento das franjas $\Gamma = \text{período}$

$$[\Delta t' - \Delta t] / \Gamma = \Delta N = v^2 / c^2 [L_1 + L_2] / c\Gamma \quad c\Gamma = \lambda \text{ comp. de onda da radiação.}$$

No experimento de Michelson - Morley:

$L_1 = L_2 = L = 11\text{m}$, $\lambda = 5,5 \times 10^{-7}\text{ m}$ e $v/c = 10^{-4}$,
com isso era esperado um desvio: **0.4 franjas.**

Ou seja, este era o deslocamento de franjas que deveria ser observado caso houvesse alguma diferença na velocidade da luz medida nos dois referenciais, na Terra e no éter (se os feixes de luz tivessem viajado a velocidades diferentes por causa do movimento da terra).

NENHUMA MUDANÇA FOI OBSERVADA ➔ **A velocidade da luz é uma constante absoluta e não existe nenhum éter**
OE's podem se propagar no vácuo

TRANSFORMAÇÃO DE LORENTZ - TL

A relação correta entre as coordenadas de um referencial estacionário (t, x, y, z) e as de um referencial que se move com velocidade constante (t', x', y', z') foi proposta por Lorentz em 1890.

Lorentz **PROPOS** uma transformação das coordenadas **espaço-tempo**, que deixava as equações de Maxwell inalteradas, frente a esta **TL**.

As equações de Maxwell **são invariantes** frente à **TL**, ou seja, as equações de Maxwell têm a mesma cara em todos os referenciais inerciais.

Isto é verdade para qualquer velocidade, mesmo para as grandes velocidades desde que **$v < c$** .

A **TL** relacionando as coordenadas dos 2 sistemas de referência tem as seguintes propriedades:

A **T** é uma função linear de x e t ;

A **T** não altera as coordenadas y e z ;

A **T** não altera a velocidade da onda de luz;

Fazendo uma segunda **T** com uma velocidade v na direção negativa dos x 's, obtem-se novamente as coordenadas originais espaço-temporal;

Quando **$v \ll c$** , a **TL** recai na **TG**.

A Transformação nas coordenadas espaço-tempo que satisfaz todos estes pré-requisitos pode ser escrita como:

$$t' = \gamma (t - xv/c^2)$$

$$x' = \gamma (x - vt)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

onde $\gamma = 1 / [(1 - v^2/c^2)^{1/2}]$ $\gamma > 1$

A forma da **TL** é uma consequência direta do fato de que a velocidade da luz é a mesma em todos os sistemas de referência. Podemos resolver as equações para t , x , y e z para obter a transformação inversa o que nos leva a expressões iguais com x e x' invertidos assim como o t e t' , e com $-v$ no lugar de v :

$$t = \gamma (t' + x'v/c^2)$$

$$x = \gamma (x' + vt')$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

onde $\gamma =$ fator de Lorentz

EXEMPLO 4.1 : Mostre que se transformamos primeiro na direção x e depois na direção $-x$, com a mesma velocidade (v), acabamos com as coordenadas originais de espaço e tempo.

Einstein foi o primeiro a entender que os físicos deveriam abandonar o conceito confuso de éter. Ele aceitou a idéia de que a luz se propaga através do vácuo, que é realmente o vazio.

POSTULADO: As leis dos fenômenos EM e as leis da Mecânica são as mesmas em todos os referenciais inerciais mesmo quando estes referenciais se movem um em relação ao outro.

Simultaneidade

A 4ª TG diz que $t'=t$, ou seja, a escala temporal é a mesma em todos os lugares e em qualquer instante em qualquer dos 2 SRs

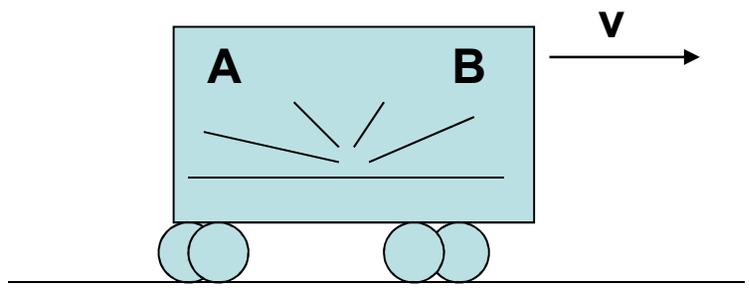
Este postulado implica que ou se modificam as equações de Maxwell ou as TG, já que as duas juntas negam o postulado

Definição de Einstein

Um evento ocorrendo no tempo t_1 na posição x_1 , é simultâneo com outro evento ocorrendo no tempo t_2 na posição x_2 , se o sinal luminoso emitido em x_1 e o emitido em x_2 chegarem simultaneamente no ponto médio geométrico entre x_1 e x_2 .

Consequência: 2 eventos que são simultâneos quando observados de um SR **NÃO SÃO** simultâneos quando observados de um segundo SR que se move em relação ao primeiro

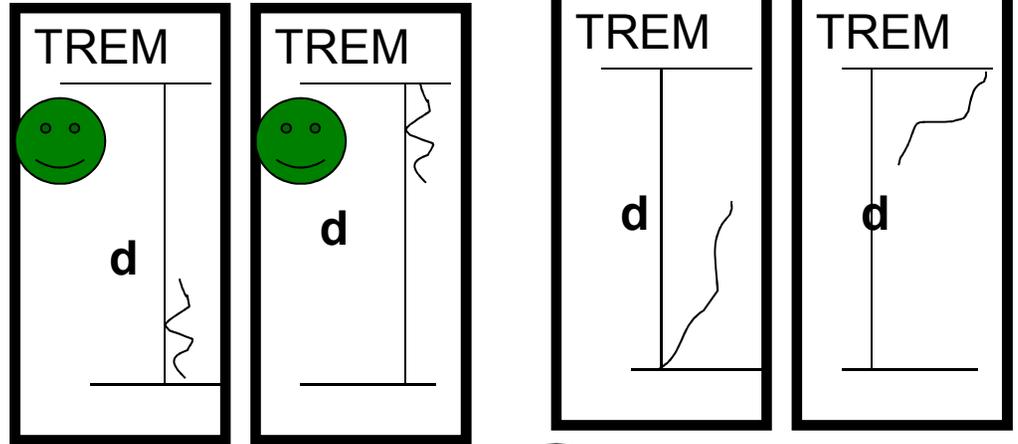
Exemplos:



Para o SR do trem, a luz chega em A ao mesmo tempo que em B. Para o referencial Terra, a luz chega mais rápido em A do que em B pois a parede do trem (lado A) está se aprox. da frente luminosa

$$\Delta t' = d/c$$

Tempo próprio



observador em repouso no evento "dentro do trem"



Referencial em movimento

Dilatação Temporal

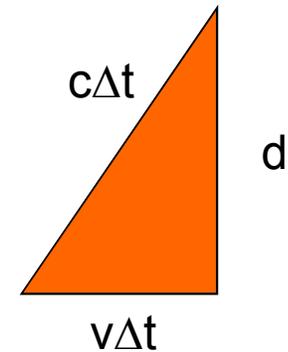
$$T = \gamma T_0$$

$$(c\Delta t)^2 = (v\Delta t)^2 + d^2$$

$$(\Delta t)^2 [c^2 - v^2] = d^2$$

$$(\Delta t)^2 = d^2/c^2 \cdot 1/(1 - v^2/c^2)$$

$$(\Delta t) = (\Delta t') \cdot 1/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$$

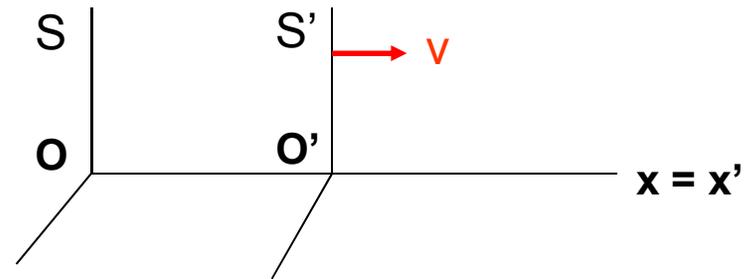


Como $\gamma > 1 \Rightarrow (\Delta t) > (\Delta t')$ o tempo foi dilatado

no referencial no qual o observador está parado

As Transformações de Lorentz

Qdo $t = t' = 0$, O' produz uma emissão luminosa que se expande do ponto de emissão com velocidade c em todas as direções



Entretanto, de acordo com O' , no tempo t' , a frente de onda será uma esfera centrada na sua origem com raio $r' = ct'$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2$$

Mas será igualmente verdadeiro que de acordo com a origem O , a luz se expandirá do ponto de emissão, sua origem, com velocidade c em todas as direções.

Do ponto de vista de O , a frente de onda no tempo t é também uma esfera de raio ct centrada na sua própria origem e portanto satisfazendo a:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$$

PROPOSTA:

$$t' = a_1 x + a_2 t$$

$$x' = a_3 x + a_4 t$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

Logo: $t' = a_1 x + a_2 t$

$$X' = a_3 x - a_3 vt = a_3(x - vt)$$

PONTO O' : S $x_{O'} = vt$

S' $x'_{O'} = 0$

$$x'_{O'} = a_3 x_{O'} + a_4 t$$

$$0 = a_3 (vt) + a_4 t$$

$$\Rightarrow -a_3 vt = a_4 t \Rightarrow -a_3 v = a_4$$

FAZER!!!!!!

A EQUAÇÃO DE ONDA

A descoberta da TL por Lorentz ocorreu quando analisava o comportamento dos campos B+E de uma carga em movimento com velocidade constante.

A TL foi identificada com a T das coordenadas espaço-tempo que não altera a forma das equações de Maxwell. Como a equação da OE está contida nas equações de Maxwell, a TL tb não altera a forma da equação de onda que é dada por:

$$\partial^2 F / \partial x^2 + \partial^2 F / \partial y^2 + \partial^2 F / \partial z^2 = 1/c^2 \partial^2 F / \partial t^2$$

A TG não preserva a forma da equação de onda. Mediante a TG as derivadas espaciais ficam da seguinte forma:

$$x' = x - vt, \quad t' = t$$

$$\begin{aligned} \partial F / \partial x &= \partial F / \partial x' \partial x' / \partial x + \partial F / \partial t' \partial t' / \partial x = \partial F / \partial x' \quad \text{ou} \\ \partial^2 F / \partial x^2 &= \partial^2 F / \partial x'^2 \quad \partial^2 F / \partial y^2 = \partial^2 F / \partial y'^2 \quad \partial^2 F / \partial z^2 = \partial^2 F / \partial z'^2 \end{aligned}$$

As derivadas temporais ficam :

$$\begin{aligned} \partial F / \partial t &= \partial F / \partial t' \partial t' / \partial t + \partial F / \partial x' \partial x' / \partial t = \partial F / \partial t' - v \partial F / \partial x' \\ \text{e } \partial^2 F / \partial t^2 &= (\partial / \partial t' - v \partial / \partial x') (\partial F / \partial t' - v \partial F / \partial x') = \partial^2 F / \partial t'^2 - 2v \partial^2 F / \partial x' \partial t' + v^2 \partial^2 F / \partial x'^2 \end{aligned}$$

Usando agora as derivadas a segunda na equação de onda no sistema de referência que se move temos,

$$\partial^2 F / \partial x'^2 + \partial^2 F / \partial y'^2 + \partial^2 F / \partial z'^2 = 1/c^2 \{ \partial^2 F / \partial t'^2 - 2v \partial^2 F / \partial x' \partial t' + v^2 \partial^2 F / \partial x'^2 \}$$

Claramente vemos que a forma da equação de onda se alterou. No limite de $v \rightarrow 0$, a forma é recuperada!

Já a **TL** preserva a forma da equação de onda: $[x' = \gamma (x - vt), t' = \gamma (t - xv/c^2)]$

$$\partial F / \partial x = \partial F / \partial x' \cdot \partial x' / \partial x + \partial F / \partial t' \cdot \partial t' / \partial x = \gamma \partial F / \partial x' - \gamma v / c^2 \partial F / \partial t'$$

$$\partial F / \partial t = \partial F / \partial t' \cdot \partial t' / \partial t + \partial F / \partial x' \cdot \partial x' / \partial t = \gamma \partial F / \partial t' - \gamma v \partial F / \partial x'$$

Logo, teremos:

$$\begin{aligned} \partial^2 F / \partial x^2 &= (\gamma \partial / \partial x' - \gamma v / c^2 \partial / \partial t') (\gamma \partial F / \partial x' - \gamma v / c^2 \partial F / \partial t') = \\ &= \gamma^2 \partial^2 F / \partial x'^2 - 2\gamma^2 v / c^2 \partial^2 F / \partial t' \partial x' + \gamma^2 v^2 / c^4 \partial^2 F / \partial t'^2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \partial^2 F / \partial t^2 &= (\gamma \partial / \partial t' - \gamma v \partial / \partial x') (\gamma \partial F / \partial t' - \gamma v \partial F / \partial x') = \\ &= \gamma^2 \partial^2 F / \partial t'^2 - 2\gamma^2 v \partial^2 F / \partial t' \partial x' + \gamma^2 v^2 \partial^2 F / \partial x'^2 \end{aligned}$$

Desta forma obtemos que:

$$\begin{aligned} &\gamma^2 \partial^2 F / \partial x'^2 - 2\gamma^2 v / c^2 \partial^2 F / \partial t' \partial x' + \gamma^2 v^2 / c^4 \partial^2 F / \partial t'^2 + \partial F^2 / \partial y'^2 + \partial F^2 / \partial z'^2 \\ &= \gamma^2 / c^2 \partial^2 F / \partial t'^2 - 2\gamma^2 v / c^2 \partial^2 F / \partial t' \partial x' + \gamma^2 v^2 / c^2 \partial^2 F / \partial x'^2 \end{aligned}$$

$$[\gamma^2 - \gamma^2 v^2 / c^2] \partial^2 F / \partial x'^2 + \partial F^2 / \partial y'^2 + \partial F^2 / \partial z'^2 = [\gamma^2 - \gamma^2 v^2 / c^2] 1/c^2 \partial^2 F / \partial t'^2$$

ou

$$\partial F^2 / \partial x'^2 + \partial F^2 / \partial y'^2 + \partial F^2 / \partial z'^2 = 1/c^2 \partial^2 F / \partial t'^2 \quad \text{DEMONSTRADO!}$$

TRANSFORMAÇÃO DE VELOCIDADES

Uma propriedade importante da TL é que contém o fato experimental de que a velocidade da luz não depende do movimento da fonte.

Considere uma partícula num referencial S que se move com uma velocidade dx/dt na direção x. Num referencial S', definido como se movendo com uma velocidade v na direção x relativa ao referencial S, a mesma partícula tem uma velocidade dx'/dt' . A determinação de dx'/dt' , em termos de dx/dt , é obtida a partir da TL por diferenciação das coordenadas.

Lembrando que:

$$x' = \gamma (x - vt)$$

$$t' = \gamma (t - xv/c^2)$$

$$dx'/dt' = [dx - vdt] / [dt - v/c^2 dx]$$

$$= [dx/dt - v] / [1 - v/c^2 dx/dt]$$

Casos limites:

➔ quando a velocidade relativa dos dois referenciais é pequena comparada com c ($v/c \approx 0$) temos:

$$\Rightarrow dx'/dt' \approx dx/dt - v$$

REGRA DA ADICAO DE VELOCIDADE DE GALILEO

“velocity addition rule”

➔ se a partícula é um foton, então $dx/dt = c$

➔ $dx'/dt' = [c - v] / [1 - v/c^2 c] = c$
a velocidade do fóton é inalterada!

2º postulado da relatividade especial₁₈

A TL contem esta física importante.

Um corolário do segundo postulada da relatividade é que nenhuma partícula pode se mover mais rápido do que a velocidade da luz c e nenhuma partícula foi até hoje observada com $v > c$.

➔ no limite de $v \rightarrow c$, $dx'/dt' = [dx/dt - c] / [1 - c/c^2 dx/dt] = -c$

Assim, num referencial que está se movendo com v próximo a v da luz, a velocidade da partícula se aproxima de c . Em nenhum caso é possível ter dx/dt , dx'/dt' , ou v maior do que c .

Caso mais geral em que a partícula tem componentes de velocidade:

dx/dt , dy/dt e dz/dt
no referencial S .

No referencial S' a componente s da velocidade, dx'/dt' , é dada pela TL já que as coordenadas x' e t' não dependem de y e z .

Embora as coordenadas y' e z' permaneçam inalteradas, as velocidades dy'/dt' e dz'/dt' se alteram já que t' não é igual a t .

A TL nos fornece:

$$dy'/dt' = dy / \gamma [dt - v/c^2 dx] \\ = dy/dt / \gamma [1 - v/c^2 dx/dt].$$

Vemos então que a componente da velocidade no sistema de referência que se move S' , dy'/dt' , depende de ambas as componentes das velocidades dx/dt e dy/dt do sistema estacionário S .

Analogamente,

$$dz'/dt' = dz/dt / \gamma [dt - v/c^2 dx] = dz/dt / \gamma [1 - v/c^2 dx/dt].$$

NOTA: Na maior parte das aplicações da relatividade especial a velocidade não é uma variável muito útil! A razão é que no regime extremo relativístico, as partículas se movem com v muito próximas a c . Não é muito fácil ver as diferenças físicas entre partículas que se movem com $0.99c$ e $0.999c$, mas existe uma grande diferença.

Note que podemos escrever para as componentes das velocidades:

$$\begin{array}{lll} dx'/dt' = u'_x & dy'/dt' = u'_y & dz'/dt' = u'_z \\ dx/dt = u_x & dy/dt = u_y & dz/dt = u_z \end{array}$$

$$u'^2 = [u_x^2 + v^2 - 2u_x v + u_y^2/\gamma^2 + u_z^2/\gamma^2] 1/[1 - v/c^2 u_x]^2$$

$$u'^2 = [u^2/\gamma^2 + u_x^2(1 - 1/\gamma^2) + v^2 - 2u_x v] 1/[1 - v/c^2 u_x]^2$$

Relação entre as velocidades nos dois SRs

EXEMPLO 4.2 : No Sistema de Referencia S, dois elétrons se aproximam um do outro, cada um com velocidade $v=c/2$. Qual é a velocidade relativa dos dois elétrons?

A velocidade relativa dos dois elétrons é a velocidade de um dos elétrons no referencial no qual o outro está parado. Seja então S' o referencial que se move com $c/2$ na direção negativa dos x. No S', um dos elétrons está parado. A velocidade deste elétron em S' é:

$$\Rightarrow dx/dt = c/2 \quad \text{e} \quad v = -c/2$$

$$dx'/dt' = [dx/dt - v] / [1 - v/c^2 dx/dt] = [c/2 - (-c/2)] / [1 - (-c/2c^2)(c/2)] = 4c/5$$

EXEMPLO 4.3 : No Sistema de Referencia S, um elétron tem velocidade $c/2$ na direção x e um fóton tem a velocidade c na direção y. Qual é a velocidade relativa do elétron e o fóton?

Do segundo postulada da relatividade sabemos responder sem fazer contas!!! A velocidade relativa entre eles deve ser c!!!! Vamos testar a partir das relações matemáticas elaboradas. Supomos para isso que S' se mova com velocidade $c/2$ na direção positiva dos x. No referencial S' o elétron está em repouso. A do fóton é dada por

$$\Rightarrow v = c/2 \quad dx/dt = 0$$

$$\gamma = 1 / [(1-v^2/c^2)^{1/2}] = 1 / [(1-(c/2)^2/c^2)^{1/2}] = (4/3)^{1/2}$$

$$dy'/dt' = dy/dt / \gamma [1 - v/c^2 dx/dt] = c / (4/3)^{1/2} [1 - (c/2)/c^2 (0)] = (3)^{1/2} c/2$$

$$dx'/dt' = [dx/dt - v] / [1 - v/c^2 dx/dt] = [0 - c/2] / [1 - (c/2)/c^2 (0)] = -c/2$$

Como a componente z da velocidade do fóton é nula a velocidade do fóton neste sistema de referência é:

$$[(dx'/dt')^2 + (dy'/dt')^2 + (dz'/dt')^2]^{1/2} = [c^2/4 + 3c^2/4 + 0]^{1/2} = c$$

DILATAÇÃO TEMPORAL

Considere um intervalo de tempo Δt medido numa posição fixa x_0 , num referencial estacionário,

$$\Delta t = t_2 - t_1.$$

Se usamos a TL para calcular o intervalo de tempo $\Delta t'$ medido num referencial que se move com velocidade v , obtemos:

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \gamma [t_2 - x_0 v/c^2] - \gamma [t_1 - x_0 v/c^2] = \gamma [t_2 - t_1] = \gamma \Delta t$$

Conclusão: o intervalo de tempo é maior no referencial que se move em relação ao evento!

Este resultado é chamado de **dilatação temporal!**

➔ Conseqüência direta do segundo postulada da relatividade especial. O intervalo de tempo medido num referencial no qual o relógio está em repouso ➔ **tempo próprio**

Fisicamente:

Considere o intervalo de tempo que leva a luz para viajar uma distância d do ponto A ao ponto B no referencial S.

O relógio neste caso é o aparato que detecta a luz. Temos: **$\Delta t = d/c$.**

Considere agora que vamos medir o intervalo de tempo do mesmo evento, luz viajando de A para B, mas considerando um referencial que se move (S'). O segundo postulada diz que a velocidade da luz é constante.

Analisando o diagrama das velocidades vemos que como a componente horizontal é v e que a velocidade final é c :

$$c^2 = v^2 + y^2$$

$$y^2 = (c^2 - v^2)^{1/2}$$

Logo: **$\Delta t' = d/(c^2 - v^2)^{1/2} = \gamma d/c$** que é maior do que o tempo no referencial S

A diferença entre os dois referenciais é que o “relógio” é estacionário em S e se move em S' . 22

Existe sempre um **referencial especial** que é aquele no qual o “relógio” está em repouso. No caso de uma partícula que sofre um decaimento radioativo espontâneo, o relógio é a própria partícula e o tempo de vida da partícula é menor no referencial que a partícula está em repouso.

EXEMPLO 4.4: Um pion é criado numa colisão de partícula com uma velocidade grande de tal forma que $\gamma = 1/[(1-v^2/c^2)^{1/2}] = 100$. Observa-se que o pion se desloca uma distância de 300 m antes de decair espontaneamente. Quanto tempo o pion vive no referencial em repouso?

Como $\gamma = 100$ então a velocidade do pion é muito próxima de c é

$$v/c = [1 - 1/\gamma^2]^{1/2} = [1 - 1/10^4]^{1/2} \approx 1$$

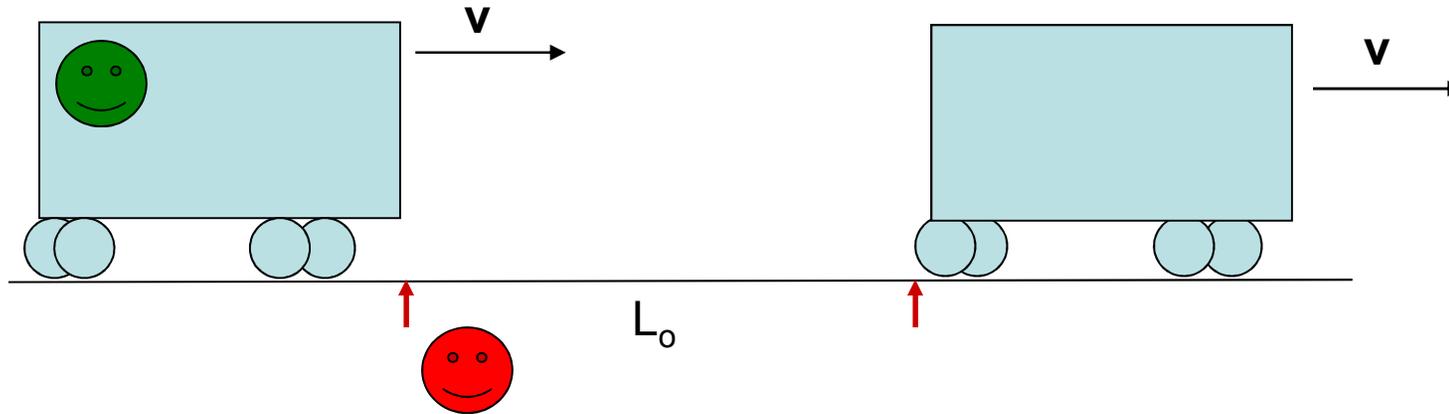
O tempo de vida no qual o pion viaja 300m é (tempo dilatado):

$$\Delta t' = d/v = 300\text{m} / 3 \times 10^8 \text{m/s} = 10^{-6} \text{ s}$$

O tempo de vida no qual o pion está em repouso (TEMPO PROPRIO)

$$\Delta t = \Delta t' / \gamma = 10^{-8} \text{ s}$$

CONTRAÇÃO ESPACIAL



$L_0 = v \Delta t_{\text{verm}}$ onde Δt_{verm} = tempo dilatado

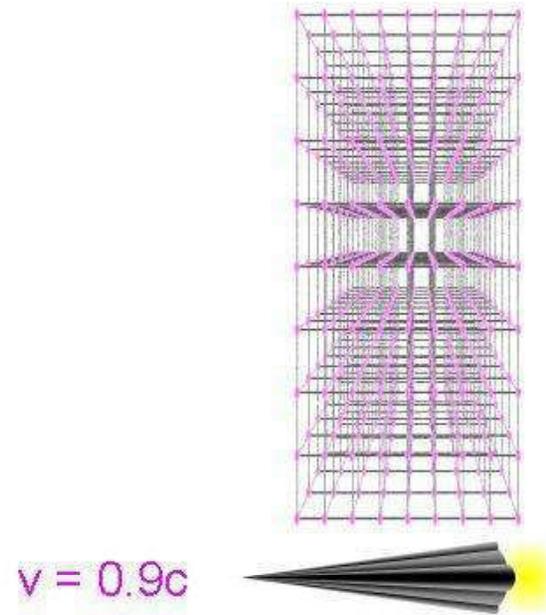
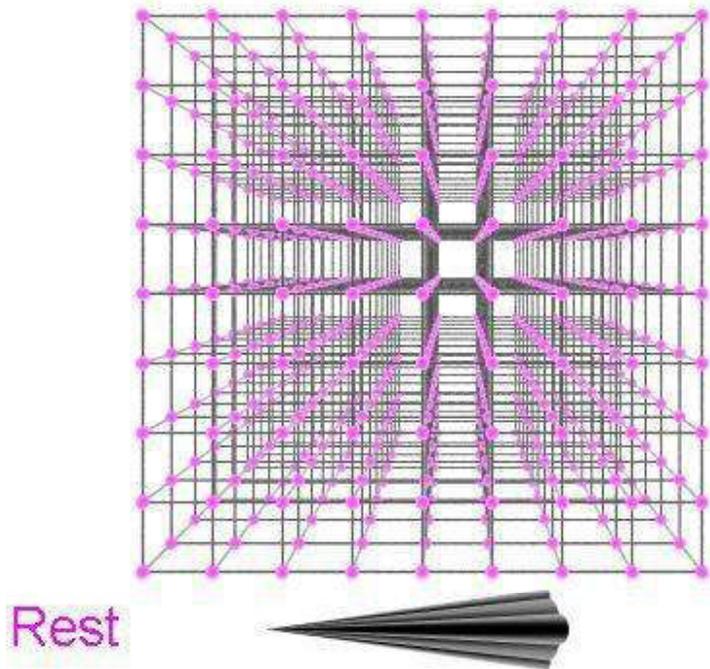
e Δt_{verm} = tempo dilatado = $\gamma \Delta t_{\text{verde}}$

$L_{\text{verde}} = v \Delta t_{\text{verde}}$ onde Δt_{verde} = tempo próprio

Conclusão:
$$\begin{aligned} L_{\text{verde}}/L_{\text{verm}} &= v \Delta t_{\text{verde}} / v \Delta t_{\text{verm}} = \Delta t_{\text{verde}} / \Delta t_{\text{verm}} \\ &= \Delta t_{\text{verde}} / \gamma \Delta t_{\text{verde}} \end{aligned}$$

$$L_{\text{verde}} = L_0 / \gamma \quad \text{contração espacial}$$

Mede-se um L menor por um fator γ quando a medida é feita num referencial que se move na direção paralela ao seu próprio comprimento



EXEMPLO. Contração do comprimento ocorre ao longo da direção do movimento. Note que a rede permanece tão grande e profunda como antes, mas encolhe mais do que a metade na direção do deslocamento.

Muons: Exemplo de dilatação temporal e contração espacial



Partículas instáveis criadas qdo raios cósmicos interagem com a atmosfera superior

Se movem com velocidades muito altas ($\beta \approx 0.9999$) e tem tempos de vida muito pequenos $\tau = 2 \times 10^{-6} \text{s}$

PERGUNTA: Será que os muon chegam a superfície dado que a camada de atmosfera é de 10Km?

RESPOSTA CLASSICA: distância = velocidade x tempo = $0.9999c \times 2 \times 10^{-6} \text{s} = 0.6 \text{ Km}$ \Rightarrow os muons **não chegam na Terra**
 Mas, de fato, eles chegam!

O que está errado? Temos que considerar os efeitos relativísticos.
 A resposta clássica mistura os referenciais:

τ se refere ao tempo de vida do muon no seu sistema de referência $t_0 = 2 \times 10^{-6} \text{s}$
 Espessura da atmosfera de 10 Km – comp no referencial da Terra $L_0 = 10 \text{Km}$

(1) Dilatação Temporal

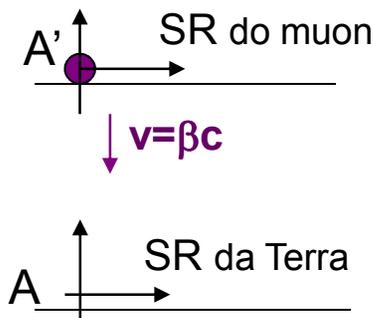
ocorre do referencial da Terra

No SR do muon:

$t' = 0$ muons são criados

$t' = \tau$ muons são destruídos

$\Delta t' = \tau$



O tempo medido no SR da Terra em A:

$$\Delta t = \gamma \Delta t' = \gamma \tau = 1.4 \times 10^{-4} \text{s}$$

tempo 70 vezes maior

$$\text{Distância} = 0.9999c \times 1.4 \times 10^{-4} \text{s} = 42 \text{ Km}$$

Como $42 \text{ Km} > 10 \text{ Km}$ \Rightarrow os muons atingem de fato a Terra

(2) Contração do comprimento – do SR do muon

No referencial **A** (agora com os muons)

Tempo de vida = $\tau = 2 \times 10^{-6} \text{s}$

Velocidade da Terra = $0.9999c$

Desta forma a distância que a Terra viaja antes que um muon decaia é de 0.6 Km.

Qual é a espessura da atmosfera que o muon vê?

Comprimento próprio da atmosfera = 10Km

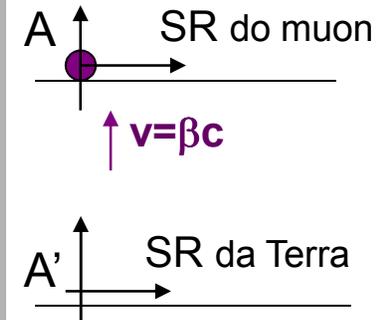
O comprimento visto no SR do muon é

$$\Delta x = \Delta x' / \gamma = 10 (1 - 0.9999^2)^{1/2} = \mathbf{0.14 \text{ Km}}$$

ou seja,

a atmosfera que o muon sente é 70 vezes mais fina
(0.6Km > 0.14Km)

➔ desta forma a Terra alcança o muon !!!!!



RELAÇÃO ENTRE ENERGIA E MOMENTUM

APROXIMAÇÃO CLÁSSICA:

A massa não é uma quantidade conservada. Partículas são criadas e destruídas em colisões de alta energia. Em experimentos envolvendo as colisões de partículas de alta energia, observamos que energia cinética pode ser transformada em massa e vice-versa. Neste sentido, massa e energia são intercambiáveis! Nem massa nem energia cinética são quantidades conservadas

Em relatividade o momento como definido $p=mv$ não se conserva para todos os SRs inerciais.

A fim de preservar a lei da conservação do momento, sua expressão é redefinida

$$p = mv \rightarrow p = \gamma mv$$

Podemos ver pq **massa x velocidade** não é conservada examinando-se a expressão clássica de momentum $p=mv$

A expressão dr/dt depende do referencial A
expressão dr/dt' , onde t' é o **tempo próprio**, é invariante e $dt' = dt/\gamma$
 $dt' < dt$

O intervalo de tempo medido no referencial no qual o “relógio” está em repouso = **proper time**. Em qq outro referencial o intervalo de tempo é maior!

Quando vamos analisar partículas de alta velocidade, vamos ter que modificar as expressões de energia cinética $mv^2/2$, que é inconsistente com o segundo postulado da RE.

Um fóton tem uma v constante $=c$, energia de massa nula ($mc^2=0$)
➔ $mv^2/2$ p/um fóton é igual à zero, mas um fóton tem energia cinética !

A EXPRESSÃO CLÁSSICA p/ a energia cinética também não funciona para partículas massivas que se movem com v altas. A expressão clássica da energia cinética prevê a violação de uma importante verificação experimental: nenhuma partícula foi observada até então se deslocando com $v > c$!

EXEMPLO 4.6: Usando a expressão clássica p/a energia cinética, calcule a velocidade de um próton que tem energia cinética de 300 GeV.

- a velocidade do próton seria dada por: $v = (2E_k/m)^{1/2}$
então: $v/c = (2E_k/mc^2)^{1/2} = (2 \times 300 \text{ GeV} / 0.94 \text{ GeV})^{1/2} = 25$ maior do que c ????

Com uma energia de 300 GeV um próton deve ter 25 x a velocidade da luz, se usarmos a expressão usual da energia cinética!!!

➔ O momentum p definido como mv é uma quantidade útil na Mecânica Clássica já que é preservada em colisões desde que $v \ll c$.

➔ Para grandes velocidades esta quantidade não é preservada!

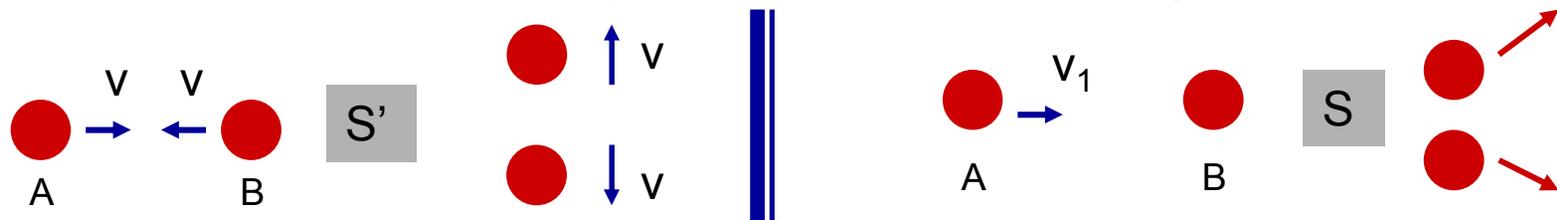
Isto pode ser visto considerando a aceleração de 1 elétron num campo elétrico. A força elétrica provoca um aumento no momentum dado por $F = dp/dt$

Se a força atua por um longo tempo, o limite pode crescer indefinidamente. Entretanto, a velocidade não pode ser maior do que c !

- ➔ O momento máximo tem que ser mc !
- ➔ Logo a expressão clássica do momentum não sobrevive quando v é muito grande.

MOMENTA RELATIVISTICO

Vamos considerar a colisão elástica de 2 partículas A e B, de massas iguais (m), em dois S's.



No referencial S' as partículas tem momenta de igual magnitude em direções opostas tanto antes como depois da colisão. Seja v a velocidade de cada partícula no referencial S , e seja $\beta = v/c$ e $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$

Antes da colisão ambas partículas se deslocam na direção x e depois ambas na direção y

No outro referencial S , a partícula B está em repouso. A velocidade da partícula A antes da colisão, v_1 , é dada em termos da transformação das velocidades vista anteriormente:

$$v_1 = dx'/dt' = [dx/dt - v] / [1 - v/c^2 dx/dt] = (v+v)/(1+v^2/c^2) = 2v / (1+\beta^2)$$

Depois da colisão, a componente x da velocidade de cada partícula em S deve ser igual relativa dos dois referenciais de acordo com a transformação das velocidades: v p/as 2's

VEMOS que o produto da massa e a velocidade não é conservado no referencial S

$$mv_1 \neq mv + mv$$

Sendo t' é o tempo próprio $dt' = (1 - v^2/c^2)^{1/2} dt = dt/\gamma$

Definimos o **momento relativístico** como sendo:

$$p = m dr/dt' = m(dr/dt)(dt/dt') = \gamma mv$$

$$p = mv/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$$

$p = \gamma mv$ onde γ é definido em termos da velocidade da partícula no referencial onde está sendo calculado o momentum

Será que neste referencial o momento vai ser conservado?

-Calculo do fator γ_1 da partícula A antes da colisão a partir da velocidade $v_1 = 2v/(1 + \beta^2)$

$$\gamma_1 = 1 / (1 - v_1^2/c^2)^{1/2} = 1 / (1 - (2v)^2/c^2(1 + \beta^2)^2)^{1/2} = 1 / (1 - 4v^2/c^2(1 + \beta^2)^2)^{1/2} = (1 + \beta^2) / (1 - \beta^2)$$

O momento total **antes** da colisão é, portanto, igual a:

$$p_1^{\text{tot}} = \gamma_1 mv_1 = (1 + \beta^2) / (1 - \beta^2) \cdot m \cdot 2v / (1 + \beta^2) = 2mv / (1 - \beta^2)$$

A magnitude das componentes y das veloc. de c/partícula depois da colisão:

NO

SR S, EM Y, DEPOIS :

$$dy'/dt' = (dy/dt) / [\gamma(1 - v/c^2 dx/dt)] = v / \gamma = v(1 - v^2/c^2)^{1/2}$$

A VELOCIDADE TOTAL DEPOIS DA COLISÃO NO SR S: $v_2 = [v^2 + v^2(1 - v^2/c^2)]^{1/2}$

$$v_2 = [v^2 + v^2 - v^2 \beta^2]^{1/2} = v(2 - \beta^2)^{1/2} = c\beta(2 - \beta^2)^{1/2}$$

O fator γ p/cada partícula **DEPOIS** da colisão, a partir de v_2 é dado por:

$$\gamma_2 = 1/(1 - v_2^2/c^2)^{1/2} = 1/(1 - (v^2/c^2)(2 - \beta^2))^{1/2} = 1/(1 - 2\beta^2 + \beta^4)^{1/2}$$

$$\gamma_2 = 1/(1 - \beta^2)$$

Desta forma, o momentum total **DEPOIS** da colisão é:

$$P_2^{\text{tot}} = \gamma_2 mv + \gamma_2 mv = 2mv/(1 - \beta^2)$$

(a componente y se anula)

⇒ $p_1^{\text{tot}} = p_2^{\text{tot}}$ O momentum foi conservado.

$$P = \gamma mv = mv/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$$

MOMENTUM DE
UMA PARTICULA DE
MASSA NAO NULA

Energia na Teoria da Relatividade Especial STR: Derivação $E = mc^2$

"GEDANKEN EXPERIMENT" de Einstein

Imagine uma caixa fechada de massa M e comprimento L , inicialmente em repouso. Um feixe de luz é emitido de uma das extremidades da caixa.

Sabemos da Mecânica que objetos que se movem carregam tanto energia quanto momentum. Isto também é verdade para ondas eletromagnéticas.

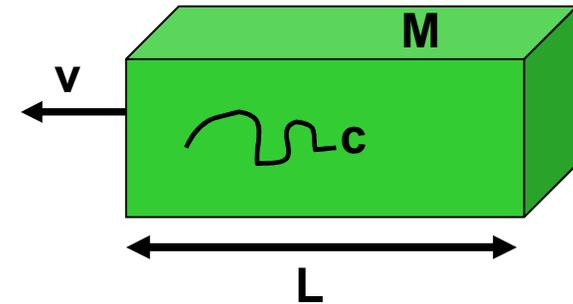
Maxwell mostrou que a energia E e momentum p de uma onda estão relacionados por $p = E/c$.

Como a onda eletromagnética emitida carrega momentum E/c , a caixa deve recuar para que o momentum se conserve.

A velocidade de recuo é v , que se supõe $v \ll c$, já que a caixa é um corpo massivo.

CONSERVAÇÃO DO MOMENTUM: $E/c = Mv$

A luz se moverá ao longo da extensão da caixa num tempo $\Delta t = L/c$ (de novo estamos supondo que $v \ll c$, de forma que a distância viajada pela luz = L).



Durante Δt a caixa se moverá uma distância muito pequena Δx dado por $\Delta x = v \Delta t = (E/Mc) (L/c) = EL/Mc^2$

Uma vez que a luz alcança o fim da caixa, ela transfere seu momentum para a caixa e faz a caixa parar.

A caixa agora está numa nova posição. Seu centro de massa parece ter sido movido, mas a caixa é um sistema isolado cujo CM não pode se mover!

Para lidar com esta contradição, Einstein supôs que a luz transporta massa (assim como energia e momentum):

Se m = massa transportada pela luz, então: $mL = M\Delta x$
de forma a garantir que o CM da caixa + luz, não se mova.

Usando a expressão para Δx e resolvendo-a para m :

$$m = M\Delta x/L = MEL/(Mc^2L) = E/c^2 \qquad E = mc^2$$

onde E = energia da luz, usualmente escrita como E_0 para denotar que é uma energia de repouso e m = massa equivalente da luz.

Embora esta expressão tenha sido obtida para a energia da OE (luz), ela é a expressão universal da equivalência entre massa e energia.

Ela tb pode ser obtida da definição da energia cinética de um corpo em movimento.

Já que massa e energia não são quantidades independentes, os princípios de conservação separados de energia e massa são adequadamente combinados no **princípio de**

conservação massa-energia.